

1. Wie lautet die allgemeine Form der Fourierreihe  
(a) in reeller Form?

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

(b) in komplexer Form?

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, n \in \mathbb{Z}$$

2. Bestimmen Sie alle Fourierkoeffizienten von

(a)  $f(x) = 3 + \sin 25x + e^{25} \sin 2x + 3\pi \cos 5x$

$a_0 = 6, b_{25} = 1, b_2 = e^{25}, a_5 = 3\pi$   
alle anderen Koeffizienten sind 0.

(b)  $f(x) = e^{-2ix} + 25 + \cos 3\pi e^{5ix}$   
Hinweis: Lösen durch genaues Hinsehen.

$c_2 = 1, c_0 = 25, c_{-5} = \cos 3\pi$   
alle anderen Koeffizienten sind 0.

3. Berechnen Sie die Fouriertransformation zu der Zahlenfolge

$f = (\dots, 0, f_{-1}; f_0; f_1; 0, \dots) = (\dots, 0, 1, 2, 1, 0, \dots)$ .

$$f(x) = \sum_{k=-1}^1 f_k e^{-ikx} = e^{-ix} + 2 + e^{ix} = 2 + 2 \cos x$$

4. Berechnen Sie die DFT der Länge 4 für den Vektor (1, 0, 2, -1). Berechnen Sie für den erhaltenen Vektor die inverse DFT der Länge 4 und überprüfen Sie, ob Sie den ursprünglichen Vektor wieder herausbekommen haben!

Hinweis: Siehe Beispiel der Vorlesung.

$f(x) = (f(0), f(1), f(2), f(3)) = (1, 0, 2, -1)$

für F(0):

$$F(0) = \sum_{x=0}^3 f(x) e^0 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + 0 + 2 - 1 = 2$$

für F(1):

$$F(1) = \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-2\pi i \frac{x}{4}} = f(0) e^0 + f(1) e^{-\pi i \frac{1}{2}} + f(2) e^{-\pi i} + f(3) e^{-3\pi i \frac{1}{2}}$$

$$F(1) = 1 * f(0) - i * f(1) - 1 * f(2) + i * f(3)$$

$$= 1 - 2 - 1i = -1 - 1i$$

für F(2):

$$F(2) = \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-4\pi i \frac{x}{4}} = f(0)e^0 + f(1)e^{-\pi i} + f(2)e^{-2\pi i} + f(3)e^{-3\pi i}$$

$$F(2) = 1 * f(0) - 1 * f(1) + 1 * f(2) - 1 * f(3)$$

$$= 1 + 2 + 1 = 4$$

für F(3):

$$F(3) = \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-6\pi i \frac{x}{4}} = f(0)e^0 + f(1)e^{-3\pi i \frac{i}{2}} + f(2)e^{-3\pi i} + f(3)e^{-9\pi i \frac{i}{2}}$$

$$F(3) = 1 * f(0) + i * f(1) - 1 * f(2) - i * f(3)$$

$$= 1 - 2 + 1i = -1 + 1i$$

$$f(0): \quad \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) e^0 = \frac{1}{4} (F(0) + F(1) + F(2) + F(3))$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{-1 - 1i}{4} + \frac{4}{4} + \frac{-1 + 1i}{4}$$

$$= \frac{6}{4} - \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f(1): \quad \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) e^{\pi i \frac{u}{2}} = \frac{1}{4} (1 * F(0) + i * F(1) + (-1) * F(2) + (-i) * F(3))$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{-1i - 1i^2}{4} - \frac{4}{4} + \frac{1i - 1i^2}{4}$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{(-1) * (-1)}{4} - \frac{4}{4} + \frac{(-1) * (-1)}{4}$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$f(2): \quad \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) e^{\pi i u} = \frac{1}{4} (1 * F(0) + (-1) * F(1) + 1 * F(2) + (-1) * F(3))$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{1 + 1i}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1 - 1i}{4}$$

$$= \frac{6}{4} + \frac{1 + 1i}{4} + \frac{1 - 1i}{4}$$

$$= \frac{6}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$f(3): \quad \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) e^{3\pi i \frac{u}{2}} = \frac{1}{4} (F(0) + (-i) * F(1) + (-1) * F(2) + i * F(3))$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{1i + 1i^2}{4} - \frac{4}{4} + \frac{-1i + 1i^2}{4}$$

$$= -\frac{2}{4} + \frac{1i^2}{4} + \frac{1i^2}{4}$$

$$= -\frac{2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

## 5. Anfänge in Matlab:

Auf dem Skripteserver liegen zwei verschiedene handgestrickte Implementierungen der diskreten Fouriertransformation `bv_dft.m` und `bv_fft.m`.

Testen Sie diese Funktionen und auch die in Matlab eingebaute Funktion `fft.m` auf die Zeit,

die diese für die DFT eines zufälligen Vektors der Länge 2048 benötigen.  
Machen Sie umfangreichen Gebrauch von der Matlab-Hilfe!

Für die Ermittlung von Zeitabständen wird ein Algorithmus nach diesem Vorbild benötigt:

```
x = rand(2048,1);  
t = clock; fft(x); etime(clock,t)
```

Dieser wird nun umgeschrieben:

```
x = rand(2048, 1); t = clock; bv_dft(x); etime(clock,t)  
= 28,6410
```

```
x = rand(2048, 1); t = clock; bv_fft(x); etime(clock,t)  
= 0,4060
```

```
x = rand(2048, 1); t = clock; fft(x); etime(clock, t)  
= 0,3430
```

## 6. (Zusatz)

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten  $a_n$ ;  $b_n$  für die folgenden Funktionen:

(a)  $f(x) = 3$  (konstante Funktion),

(b)  $f(x) = x$  in  $[-\pi, \pi]$  und dann periodisch fortgesetzt, also  $f(x + 2) = f(x)$  (Sägezahn-Funktion).

Hinweis: Es bietet sich an, zunächst zu untersuchen, ob die gegebene Funktion evtl. gerade bzw. ungerade ist und sich damit einiges an Arbeit zu sparen. Eine der Funktionen hat eine ganz einfache Fourierreihe, bei der anderen müssen Sie zur Berechnung der Fourierkoeffizienten jeweils einmal partiell integrieren.